CHAPITRE 3 : COMPARAISON DE MOYENNES ET DE PROPORTIONS

I°/ COMPARAISON DE MOYENNES

1. Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

Exemple :

D'après les résultats d'expériences antérieures, le taux moyen d'urée dans une population humaine est de 27 mg/100ml de sang. On considère un échantillon de 25 sujets de cette population et on mesure pour chacun d'eux le taux d'urée ; on a trouvé que le taux moyen est de 24,5 mg/100ml avec un écart-type de 4,7 mg/100ml. On se propose de répondre à la question suivante : la différence constatée entre la moyenne observée et celle théorique est-elle due uniquement aux fluctuations d'échantillonnage ou bien la moyenne observée est-elle en contradiction avec celle théorique. Cette question peut être posée de la façon suivante : le taux moyen d'urée dans la population est-il égal à 27 mg/100ml ou bien il est différent de 27 mg/100ml ?

Il s'agit alors d'un problème de comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique.

Généralisation du problème :

On considère un échantillon de taille n extrait au hasard d'une population et dont les valeurs du caractère des individus qui le composent sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La moyenne m du caractère dans l'échantillon porte le nom de moyenne observée :

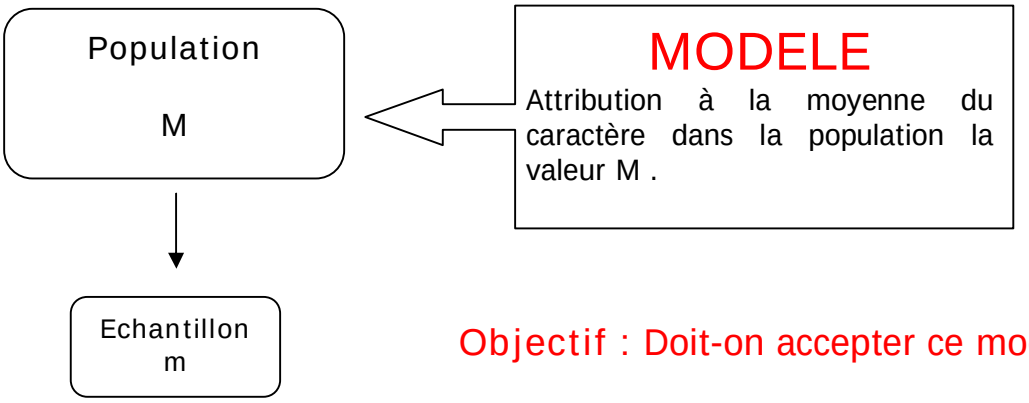
$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

L'écart-type est donné par :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}$$

Supposons que des considérations théoriques ou des résultats d'expériences antérieures nous conduisent à attribuer à la moyenne du caractère dans la population la valeur M ; cette valeur porte le nom de moyenne théorique (en général, l'écart-type du caractère σ_p dans la population est inconnu).

En général les valeurs m et M sont différentes ; il nous faut expliquer cette différence : est-elle due aux fluctuations d'échantillonnage (c'est à dire que la différence provient-il du choix au hasard de l'échantillon) ou bien le résultat observé est-il en contradiction avec la moyenne théorique M ?



Objectif : Doit-on accepter ce modèle ?

Tout se ramène donc à effectuer un test statistique : c'est une méthode mathématique qui consiste à rejeter ou non une certaine hypothèse, appelée hypothèse nulle, qui concerne une ou plusieurs populations étudiées et cela au vu des résultats observés sur un échantillon extrait au hasard de la population (ou de chaque population si elles sont plusieurs).

Test de conformité

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « L'échantillon est extrait de la population dont la moyenne du caractère est M »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|M - m|}{\frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}}}$$

3- Conclusion :
L'un des deux cas suivants se présentera :

1er cas : $n \geq 30$
Pour le risque α=5%,

- Si $\varepsilon < 1{,}96$ alors on ne rejette pas H_0 : la différence n'est pas significative.
- Si $\varepsilon \geq 1{,}96$ alors on rejette H_0 : la différence est significative.

Remarque : Pour un risque α=1% on compare la valeur de ε à 2,6.

2ème cas : $n<30$

Pour le risque α=5%, on compare la valeur de ε à t^*_α lue dans la table de STUDENT-FISHER avec le nombre de d.d.l. $\nu=n-1$.

- Si $\varepsilon < t^*_\alpha$ alors on ne rejette pas H_0 : la différence n'est pas significative.
- Si $\varepsilon \geq t^*_\alpha$ alors on rejette H_0 : la différence est significative.

Remarque
Si $n \geq 30$ le test précédent est appelé test de l'écart-réduit.
Si $n<30$ le test précédent est appelé test t de STUDENT.

Condition d'utilisation du test t de STUDENT: Dans le cas d'un petit échantillon ($n<30$) le test t de STUDENT n'est utilisable que si le caractère étudié est distribué dans la population d'où provient l'échantillon selon une loi normale (d'ailleurs, cette hypothèse est très souvent vérifiée pour les caractères en biologie et en médecine).

Solution de l'exemple précédent :
La moyenne théorique est M=27.
La moyenne observée sur l'échantillon est m=24,5mg/100ml avec un écart-type σ_e =14,7.

$n=25<30$: on utilise le test t de STUDENT en supposant que le taux d'urée dans la population est distribué selon une loi normale.

Test t de STUDENT
1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « L'échantillon de 25 sujets est extrait au hasard de la population dont le taux moyen est de 27 mg/100ml »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|M - m|}{\frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}}} = \frac{|27 - 24.5|}{\frac{4.7}{\sqrt{25-1}}} = 2,6$$

3- Conclusion :

Au risque α=5% avec le nombre de d.d.l. ν=n -1=24 la table de STUDENT-FISHER nous donne t^*_α =2,064.

$\varepsilon > t^*_\alpha$ alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une différence significative entre m et M. Le taux moyen d'urée dans la population est différent de 27 mg/100ml.

2. Comparaison de deux moyennes pour des observations indépendantes

Ouvrons ici une parenthèse sur la notion de comparaison de traitements médicaux :

Principe général d'un essai thérapeutique

Un essai thérapeutique est un essai qui consiste à comparer un nouveau traitement au traitement connu ou à un placebo pour savoir s'il est efficace.

1. Résultat d'un traitement

Le résultat d'un traitement d'une maladie peut être :

- un caractère quantitatif : généralement un dosage d'une substance
  Exemple : traitement destiné à combattre l'urémie.
- un caractère qualitatif : Succès ou Echec.

2. Nécessité d'une comparaison

On veut évaluer l'efficacité d'un nouveau traitement d'une certaine maladie et on dispose déjà d'un traitement dont l'efficacité a été déjà prouvée. Le nouveau traitement sera donc comparé au traitement de référence après avoir observé les deux groupes de malades obtenus par tirage au sort. Supposons maintenant qu'aucun traitement efficace n'est connu à ce jour ; il est donc impossible d'envisager une comparaison du type précédent puisqu'il y a absence de traitement de référence. Soit un groupe de malades auxquels on administre le nouveau traitement ; supposons qu'on ait obtenu un pourcentage de guérison de 80% : ce pourcentage isolé ne signifie rien. En effet, deux composantes entrent en compte dans la guérison : l'évolution spontanée de la maladie (certaines maladies peuvent régresser spontanément) et l'effet du traitement.

Groupe recevant le traitement étudié $\xrightarrow{\textit{Guérison (spontanée + traitement)} \quad 80\%}$

Il est impossible de savoir, pour un groupe de malades sous traitement, la part de l'évolution qui revient à la régression spontanée et celle qui revient à l'effet du traitement. Le seul moyen d'apprécier chacun de ses deux effets est d'envisager deux groupes de malades (obtenus par tirage au sort) dont l'un reçoit le traitement étudié (appelé groupe traité) et l'autre reçoit un placebo (appelé groupe témoin).
Un placebo est un produit sans action pharmacologique administré à la place d'un traitement étudié et qui en a la même forme pharmaceutique. Dans les essais thérapeutiques, on a recours à des placebos pour évaluer l'efficacité d'un traitement étudié en éliminant toute participation psychologique : au cours d'un essai en simple aveugle, les patients ne savent pas s'ils ont reçu le véritable traitement ou le placebo ; au cours d'un essai en double aveugle, les médecins qui observent les résultats ne le savent pas non plus. La comparaison des résultats obtenus dans les deux groupes permet d'évaluer l'efficacité du traitement étudié par rapport à son « effet placebo ».

Groupe traité $\xrightarrow{\text{Guérison (spontanée + traitement)}}$ P1

Groupe témoin $\xrightarrow{\text{Guérison (spontanée)}}$ P2

Cas de comparaison de deux traitements :

Groupe traité par le 1er traitement $\xrightarrow{\text{Guérison (spontanée + 1er traitement)}}$ P1

Groupe traité par le 2ème traitement $\xrightarrow{\text{Guérison (spontanée + 2ème traitement)}}$ P2

3. Nécessité d'un tirage au sort

Les groupes de malades doivent être comparables pour pouvoir attribuer la cause de la différence observée au traitement. Le seul moyen d'obtenir deux groupes de malades comparables pour tous les caractères connus ou inconnus autre que la traitement est le tirage au sort.

Fermons ici notre parenthèse.

Considérons à présent deux exemples suivants :

Exemple 1 :

On veut comparer l'efficacité de deux traitements T_1 et T_2 ayant pour but de diminuer le taux d'urée dans le plasma. Le but de l'essai est de répondre à la question suivante :

Les deux traitements T_1 et T_2 sont-ils d'efficacité différente ?

Dans ce but, on prend un échantillon de malades que l'on sépare par tirage au sort en deux groupes de même effectif ou d'effectifs différents (avant toute expérience, les deux groupes doivent avoir sensiblement le même taux d'urée dans le plasma). On administre le traitement T_1 aux malades du premier groupe et le traitement T_2 à ceux du deuxième groupe. A l'issue de l'expérience, on obtient les taux moyens respectifs d'urée m_1 et m_2 ainsi que les écart-types respectifs σ_1 et σ_2 .

$m_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i$ et $\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1)^2}$ où $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ sont les taux d'urée du premier groupe composé de n_1 malades.

$m_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_i$ et $\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - m_2)^2}$ où $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ sont les taux d'urée du deuxième groupe composé de n_2 malades.

Le problème consiste à comparer m_1 et m_2 pour pouvoir répondre à la question posée.

Exemple 2 :

On veut évaluer l'efficacité d'un traitement T ayant pour but d'augmenter le taux de glycémie. Le but de l'essai est de répondre à la question suivante :

Le traitement T est-il est efficace ?

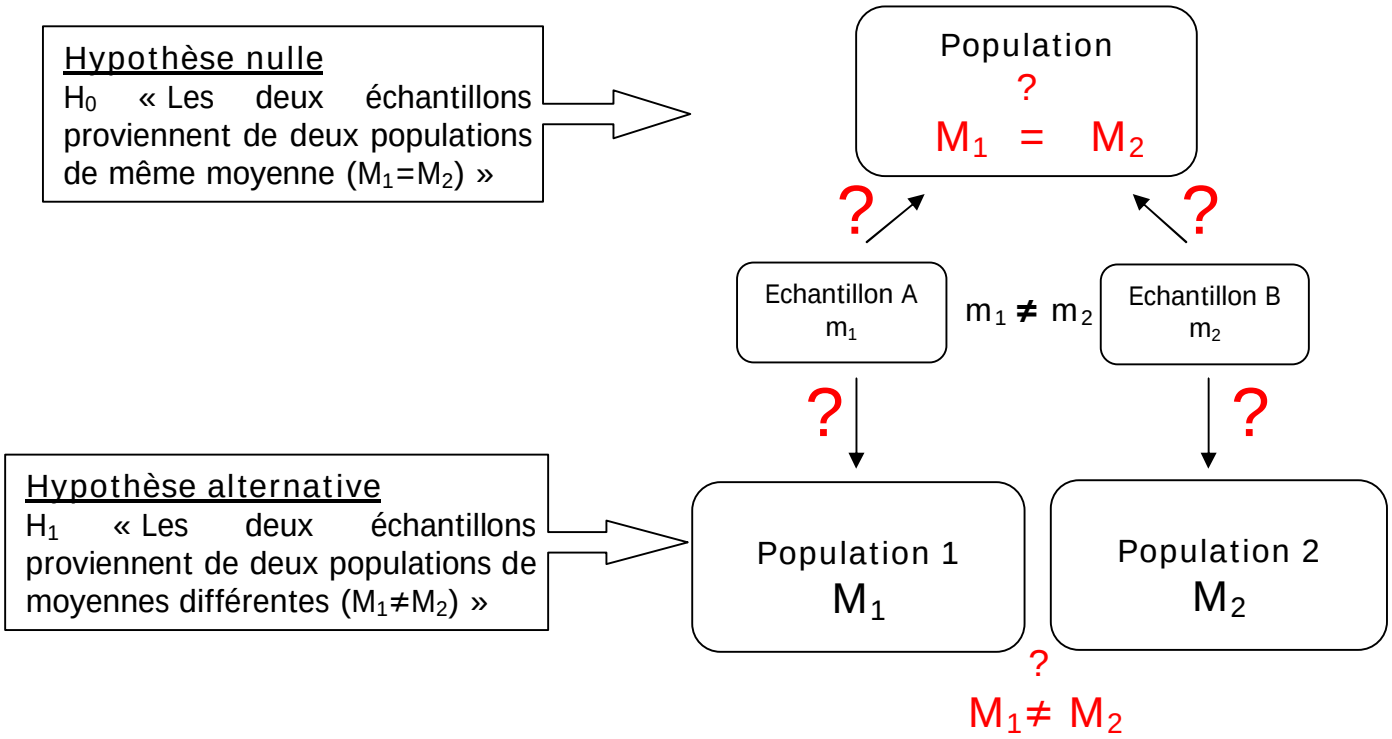
Dans ce but, on sépare par tirage au sort un échantillon de malades en deux groupes ayant au départ sensiblement le même taux de glycémie. Les malades du premier groupe reçoivent le traitement T (appelé groupe traité) et ceux du deuxième groupe reçoivent un placebo (appelé groupe témoin).

A l'issue de l'expérience, on obtient le taux moyen de glycémie m_1 du premier groupe ainsi que son écart-type σ_1 et ceux m_2 et σ_2 du deuxième groupe.

Le problème consiste à comparer m_1 et m_2 pour pouvoir répondre à la question posée.

Généralisation du problème :

Etant donné deux échantillons de tailles respectives n_1 et n_2 de moyennes m_1 et m_2 , d'écart-types σ_1 et σ_2 relatives à un caractère quantitatif. On suppose qu'ils sont extraits de deux populations dont les moyennes sont M_1 et M_2 (elles sont inconnues). Le problème consiste à comparer les moyennes de ces deux échantillons.
En général, les moyennes m_1 et m_2 sont différentes ; il nous faut expliquer cette différence :est-elle due aux fluctuations d'échantillonnage (c'est à dire que la différence provient-elle du choix au hasard des deux échantillons) ou bien est-elle jugée trop grande ?
Cette question peut être posée de la façon suivante :
Les deux échantillons proviennent-ils de deux populations de même moyenne (c'est à dire $M_1=M_2$) ou bien de deux populations de moyennes différentes (c'est à dire $M_1 \neq M_2$) ?
On procède au test de comparaison de deux moyennes pour des observations indépendantes :



Test d'homogénéité :

1er cas : n_1 et $n_2 \geq 30$ Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « Les deux échantillons proviennent de deux populations de même moyenne ($M_1=M_2$) »

Dans l'exemple 1, H_0 « Les deux traitements T_1 et T_2 ont la même efficacité »
Dans l'exemple 2, H_0 « Le traitement T n'est pas efficace »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1 - 1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2 - 1}}}$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

- Si $\varepsilon < 1{,}96$ alors on ne rejette pas H_0 et on conclut qu'il n'y a pas de différence significative entre les moyennes des deux échantillons.
- Si $\varepsilon \geq 1{,}96$ alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une différence significative entre les moyennes des deux échantillons.

Remarque : Pour le risque α=1%, on compare la valeur de ε à 2,6.

2ème cas : n_1 ou n_2 <30 Test t de STUDENT

1- On pose l'hypothèse nulle H_0 définie comme dans le 1er cas

2- On calcule la statistique t :

$$t = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\text{où } s^2 = \frac{n_1.\sigma_1^2 + n_2.\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

3- Conclusion :

On compare la valeur de t ainsi calculée avec celle t_α^* de la table de STUDENT-FISHER en fonction du nombre de d.d.l $\nu = n_1 + n_2 - 2$ et le risque α=5% ou α=1%.

- Si $t < t_\alpha^*$ alors on ne rejette pas H_0 : la différence n'est pas significative.
- Si $t \geq t_\alpha^*$ alors on rejette H_0 : la différence est significative.

Conditions d'utilisation du test t de STUDENT:

Dans le cas des petits échantillons (n_1 ou n_2 <30) le test t de STUDENT n'est utilisable que si le caractère étudié est distribué dans les deux populations d'où proviennent les échantillons selon des lois normales et de même variance ($\sigma_{p1}^2 = \sigma_{p2}^2$)

- La première condition est souvent vérifiée : Les caractères rencontrés en biologie, du fait qu'ils résultent de l'addition d'un grand nombre d'effets indépendants, obéissent à des lois de probabilités proches de la loi normale.
- Pour savoir si la deuxième condition est vérifiée, on utilise le test de comparaison de deux variances appelé test F de FISHER-SNEDECOR.

Test F de FISHER-SNEDECOR

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 « Les deux populations ont la même variance ($\sigma_{p1}^2 = \sigma_{p2}^2$) »

2- On calcule :

$s_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1}\sigma_1^2$: c'est la variance estimée de σ_{p1}^2 .

$s_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1}\sigma_2^2$: c'est la variance estimée de σ_{p2}^2 .

Si $s_1^2 > s_2^2$, on calcule la statistique F :

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Si $s_1^2 < s_2^2$, on calcule la statistique F :

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

3- Conclusion :

Si $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$, on la compare avec la valeur de F_s de la table de FISHER-SNEDECOR en fonction du nombre de d.d.l. $\nu_1 = n_1 - 1$ (colonne) et $\nu_2 = n_2 - 1$ (ligne) et le risque α=5%.

Si $F = \frac{s_2^2}{s_1^2}$, on la compare avec la valeur de F_s de la table de FISHER-SNEDECOR en fonction du nombre de d.d.l. $\nu_2 = n_2 - 1$ (colonne) et $\nu_1 = n_1 - 1$ (ligne) et le risque α=5%.

- Si $F \geq F_s$ alors on rejette H_0 : la différence est significative.
- Si $F < F_s$ alors on ne rejette pas H_0 : la différence n'est pas significative.

Remarque : Si les variances des deux populations d'où proviennent les deux échantillons sont différentes, on utilise le test de l'écart-réduit amélioré par WELCH. Ce test consiste à calculer, comme dans le test de l'écart-réduit, la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1 - 1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2 - 1}}}$$

On compare la valeur de ε avec la valeur donnée par la table de STUDENT-FISHER en fonction du risque α=5% ou α=1% et le nombre de d.d.l. ν est l'entier le plus proche de k donné par la relation :

$$k = \frac{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1 - 1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{\sigma_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}$$

Exemple :

Dans des études d'anesthésie, on veut comparer l'effet de deux somnifères. On a noté les durées de sommeil qui ont suivi les injections d'une dose bien définie. On a obtenu les résultats suivants :

Echantillon	Durées de sommeil exprimées en minutes											
Somnifère 1	170	175	187	180	190	165	175	174	173	181		
Somnifère 2	155	160	164	150	160	159	154	156	160	167	153	158

Solution :

Echantillon 1: $n_1 = 10$ Somnifère 1

Echantillon 2: $n_2 = 12$ Somnifère 2

Le problème consiste à comparer les effets des deux somnifères.

n_1 et n_2 étant inférieurs à 30, on utilise le test t de STUDENT. Ce test exige la condition de normalité de la durée de sommeil et la condition d'égalité des deux variances. On suppose que la première condition est vérifiée (c'est à dire que la durée de sommeil est distribuée suivant une loi normale) et on teste l'égalité des deux variances au moyen du test F de FISHER-SNEDECOR.

Tout d'abord, on détermine les moyennes et les écart-types des deux échantillons.

$$m_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i = 177 \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1)^2} = 7{,}21 \Rightarrow \sigma_1^2 = 52$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ sont les durées de sommeil provoqué par le somnifère1.

$$m_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} y_i = 158 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - m_2)^2} = 4{,}54 \Rightarrow \sigma_2^2 = 20{,}66$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ sont les durées de sommeil provoqué par le somnifère 2.

Test F de FISHER-SNEDECOR

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 « Les deux populations ont la même variance ($\sigma_{p1}^2 = \sigma_{p2}^2$) »

2- On calcule :

$s_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1}\sigma_1^2 = \frac{10}{9}52 = 57{,}77$: c'est la variance estimée de σ_{p1}^2.

$s_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1}\sigma_2^2 = \frac{12}{11}20{,}66 = 22{,}54$: c'est la variance estimée de σ_{p2}^2.

Comme $s_1^2 > s_2^2$ alors on calcule la statistique F : $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 2{,}56$

3- Conclusion :

Au risque α=5% avec le nombre de d.d.l. ν_1 = 9 (colonne) et ν_2 = 11 (ligne) la table de FISHER-SNEDECOR nous donne F_s = 2,9.
$F < F_s$ alors on ne rejette pas H_0 : la différence entre les deux variances n'est pas significative.

Test t de STUDENT

1- On pose l'hypothèse nulle
H_0 « Les deux somnifères ont le même effet »

2- On calcule la statistique t :

$$t = \frac{|\, m_1 - m_2 \,|}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 7{,}17$$

$$\text{où} \quad s^2 = \frac{n_1.\sigma_1^2 + n_2.\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 38{,}36$$

3- Conclusion :

Au risque α=5% avec $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 20$ la table de STUDENT-FISHER nous donne t^*_α =2,086.

$t > t^*_\alpha$ alors on rejette H_0 au risque de 5% et on conclut que la différence est significative entre les moyennes c'est à dire que les deux somnifères ont des effets différents : le premier provoque des sommeils de plus longue durée que le second.

3. Comparaison de deux moyennes pour des observations appariées:

Le test précédent suppose que les échantillons sont indépendants, cependant il existe de très nombreux problèmes, en particulier en médecine et en biologie, où les observations sont dépendantes au sens suivant : chaque observation de l'échantillon E_1 est liée à une observation de l'échantillon E_2 . Dans ce cas, on dit que les observations sont appariées.
Par exemple, on donne les deux traitements au même malade ; on le fera soit successivement (l'effet du premier doit être terminé quand on administre le deuxième) soit simultanément, par exemple, on compare deux tests cutanés destinés à dépister une allergie ; on les appliquera chacun sur un bras du sujet. Dans ce cas, chaque sujet fait l'objet de deux mesures et on dit que les observations sont appariées.

Exemple :

On veut comparer deux somnifères S_1 et S_2 sur un échantillon de n sujets. Les n sujets ont reçu le somnifère S_1 un soir et on a obtenu les durées de sommeil $x_1, x_2,..., x_n$ exprimées en heures. La durée moyenne de sommeil est donc :

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Une semaine plus tard, les mêmes sujets ont reçu le somnifère S_2 et on a obtenu les durées de sommeil $y_1, y_2,...,y_n$ exprimées en heures. La durée moyenne de sommeil est donc :

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Dans ce cas, les observations sont appariées puisque chaque sujet est son propre témoin (chaque sujet fait l'objet d'une durée de sommeil avec les deux somnifères).

Le problème consiste à comparer les moyennes observées m_1 et m_2 pour savoir lequel des deux somnifères est le plus efficace.

Test d'homogénéité

1- On pose l'hypothèse nulle

H_0 « Il n'y a pas de différence entre les moyennes m_1 et m_2 »

Dans l'exemple : H_0 « Les deux somnifères ont la même efficacité »

2- On calcule :

- Les différences : $d_1 = x_1 - y_1$, $d_2 = x_2 - y_2$,..., $d_n = x_n - y_n$
- La moyenne de ces différences :

$$\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = m_1 - m_2$$

- L'écart-type de ces différences :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \overline{d}^{\,2}}$$

- On calcule la statistique ε :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{|\overline{d}|}{\frac{\sigma_d}{\sqrt{n-1}}}}$$

3- Conclusion :

1er cas : $n \geq 30$ Test de l'écart-réduit

Pour le risque α=5%,

- Si $\varepsilon < 1{,}96$ alors on ne rejette pas H_0 et on conclut qu'il n'y a pas de différence significative entre les moyennes.
- Si $\varepsilon \geq 1{,}96$ alors on rejette H_0 : et on conclut qu'il y a une différence significative entre les moyennes.

Remarque : Pour le risque α=1%, on compare la valeur de ε à 2,6.

2ème cas : $n < 30$ Test t de STUDENT

On compare la valeur de t ainsi calculée avec celle t^*_α de la table de STUDENT-FISHER en fonction du nombre de d.d.l $\nu = n - 1$ et le risque α=5% ou α=1%.

- Si $\varepsilon < t^*_\alpha$ alors on ne rejette pas H_0 : la différence n'est pas significative.
- Si $\varepsilon \geq t^*_\alpha$ alors on rejette H_0 : la différence est significative.

Conditions d'utilisation du test t de STUDENT: le test t de STUDENT n'est utilisable que si la différence des valeurs du caractère étudié est distribuée dans la population d'où provient l'échantillon selon la loi normale.

Exemple 1:

On veut comparer les effets de deux médicaments provoquant un retardement de battements du cœur sur un échantillon de 8 chats. Une expérience a donné les résultats ci-après :

	Le changement des battements du cœur par	
N° du chat	le médicament A	le médicament B
1	-22	-14
2	-14	-12
3	-36	-22
4	-28	-30
5	-8	+10
6	-22	0
7	-8	-8
8	+2	+24

Solution :

n=8<30, on utilise donc le test t de STUDENT en supposant que les mesures exprimant le retardement des battements du cœur se répartissent selon une loi normale.

Test t de STUDENT

1- On pose l'hypothèse nulle

H_0 « Les deux médicaments ont la même efficacité »

2-

	Le changement des battements du cœur par			
N° du chat	le médicament A (x_i)	le médicament B (y_i)	$d_i = x_i - y_i$	d_i^2
1	-22	-14	-8	64
2	-14	-12	-2	4
3	-36	-22	-14	196
4	-28	-30	+2	4
5	-8	+10	-18	324
6	-22	0	-22	484
7	-8	-8	0	0
8	+2	+24	-22	484
TOTAL	$\sum_{i=1}^{8} x_i = -136$	$\sum_{i=1}^{8} y_i = -52$	$\sum_{i=1}^{8} d_i = -84$	$\sum_{i=1}^{8} d_i^2 = 1560$

$$m_1 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{-136}{8} = -17 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = \frac{-52}{8} = -6{,}5$$

- La moyenne de ces différences :

$$\bar{d} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} d_i = \frac{-84}{8} = -10,5$$

- L'écart-type de ces différences :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} d_i^2 - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{1}{8}1560 - (-10,5)^2} = 9,2$$

- La statistique ε est : $\varepsilon = \dfrac{|\bar{d}|}{\dfrac{\sigma_d}{\sqrt{n-1}}} = 3,01$

3- <u>Conclusion</u> :

Au risque α=5% avec ν = n -1 = 7 la table de STUDENT-FISHER nous donne la valeur de t^*_α = 2,365 .

$\varepsilon > t^*_\alpha$ alors on rejette H_0 : il y a une différence significative entre les moyennes m_1 et m_2 , c'est à dire que les effets des deux médicaments sont différents. Le médicament A est plus efficace que le médicament B dans le retardement du battement cardiaque ($m_1 < m_2$).

<u>Exemple 2</u>:

On a fait une numération globulaire (évaluation du nombre de globules rouges dans un mm^3 de sang) à 20 personnes, à deux périodes de l'année : en janvier-février et en septembre-octobre. On a obtenu les résultats suivants :

<u>Numérations globulaires à deux périodes (divisée par 100 000)</u>

N° du sujet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Janvier - Février	46	38	42	47	48	40	43	43	42	49	45	51	47	52	50	48	47	47	47	45
Septembre - Octobre	48	47	44	45	51	44	47	48	47	57	49	55	48	48	46	48	54	54	44	48

Le résultat de la numération globulaire a-t-il changé d'une période à l'autre ?

<u>Solution</u> :

Il convient de remarquer que les observations sont appariées car on a fait une numération globulaire aux mêmes personnes à deux périodes différentes.

n=20<30, on utilise donc le test t de STUDENT en supposant que la numération globulaire suit une loi normale.

<u>Test t de STUDENT</u>

1- On pose l'hypothèse nulle

H_0 « La différence entre les numérations globulaires aux deux périodes n'est pas significative »

2-

	La numération globulaire en			
N° du sujet	Janvier-Février x_i	Septembre-Octobre y_i	$d_i = x_i - y_i$	d_i^2
1	46	48	-2	4
2	38	47	-9	81
3	42	44	-2	4
4	47	45	2	4
5	48	51	-3	9
6	40	44	-4	16
7	43	47	-4	16
8	43	48	-5	25
9	42	47	-5	25
10	49	57	-8	64
11	45	49	-4	16
12	51	55	-4	16
13	47	48	-1	1
14	52	48	4	16
15	50	46	4	16
16	48	48	0	0
17	47	54	-7	49
18	47	54	-7	49
19	47	44	3	9
20	45	48	3	9
TOTAL	$\sum_{i=1}^{20} x_i = 917$	$\sum_{i=1}^{20} y_i = 972$	$\sum_{i=1}^{20} d_i = -55$	$\sum_{i=1}^{20} d_i^2 = 429$

$$m_1 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{917}{20} = 45{,}85 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{972}{20} = 48{,}6$$

- La moyenne de ces différences :

$$\bar{d} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} d_i = \frac{-55}{20} = -2{,}75$$

- L'écart-type de ces différences :

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} d_i^2 - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{1}{20}\,429 - (-2;75)^2} = 3{,}72$$

- La statistique ε est : $\varepsilon = \dfrac{|\bar{d}|}{\dfrac{\sigma_d}{\sqrt{n-1}}} = 3{,}22$

3- <u>Conclusion</u> :

Au risque α=5% avec $\nu = n - 1 = 19$ la table de STUDENT-FISHER nous donne la valeur de $t_\alpha^* = 2{,}093$.

$\varepsilon > t^*_\alpha$ alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une différence significative entre les numérations globulaires aux deux périodes. Le nombre de globules rouges a augmenté à la deuxième période ($m_1 = 45{,}85 < m_2 = 48{,}6$).

Remarque importante :
Dans le cas des séries appariées, il est recommandé d'examiner leur différence sous deux aspects, qui sont, dans notre exemple,

1. Y a-t-il une différence entre la numération globulaire aux deux périodes ? c'est ce problème qui vient d'être résolu.
2. Y a-t-il une relation, pour un sujet, entre la numération globulaire aux deux périodes ? c'est-à-dire un sujet ayant le nombre de globules rouge élevé à la première période a-t-il de fortes chances d'avoir le nombre de globules rouges élevé à la deuxième période ? c'est un problème de degré de concordance entre les mesures ou encore on dit problème de corrélation qui sera traité dans le chapitre 6.

II°/ COMPARAISON DE DEUX PROPORTIONS :

1. Comparaison d'une proportion observée à une proportion théorique :

Exemple : Dans une population très nombreuse, on suppose qu'il y a 25% de personnes atteintes d'une certaine maladie. On choisit au hasard dans cette population 300 personnes et on relève que 93 d'entre elles sont atteintes de la maladie. La fréquence relative de personnes atteintes de la maladie est $f=\frac{93}{300}=0{,}31$.

On se propose de répondre à la question suivante :
La différence entre la proportion observée ($f=0{,}31$) et celle théorique ($p=0{,}25$) est-elle due aux fluctuations d'échantillonnage ou bien le résultat observé est-il en contradiction avec l'hypothèse que la proportion de malades dans la population est de 25% ?
Il s'agit donc d'un problème de comparaison d'une proportion observée à une proportion théorique.

Généralisation du problème :

Soit une population dans laquelle une certaine proportion d'individus qui possèdent un caractère qualitatif bien déterminé. On extrait au hasard un échantillon de taille n ; soit f la fréquence relative au caractère étudié. Cette fréquence porte le nom de proportion observée. Supposons que des considérations théoriques ou des résultats antérieurs nous ont conduits à attribuer à cette proportion une valeur p. La proportion p porte le nom de proportion théorique.
En général les valeurs f et p sont différentes ; il nous faut expliquer cette différence : est-elle due aux fluctuations d'échantillonnage (c'est à dire que la différence provient du choix au hasard de l'échantillon) ou bien le résultat observé est-il en contradiction avec la proportion théorique p ?

Test de conformité Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « L'échantillon est extrait de la population dont la proportion du caractère est p »

2- On calcule la statistique ε :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{|p - f|}{\sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}}}}$$

3- Conclusion :

Pour le risque α=5%,

- Si ε < 1,96 alors on ne rejette pas H_0 : la différence n'est pas significative.
- Si $\varepsilon \geq$ 1,96 alors on rejette H_0 : la différence est significative.

Remarque : Pour le risque α=1%, on compare la valeur de ε à 2,6.

Condition d'utilisation du test : Le test n'est utilisable que si n.p≥5.

Solution de l'exemple précédent :
La proportion théorique : p=0,25

Echantillon : k=93 , n=300 d'où la proportion observée : $f=\frac{93}{300}=0,31$

On utilise le test de l'écart-réduit sachant que la condition d'utilisation est vérifiée : n.p=75>5.

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « L'échantillon est extrait au hasard de la population dont 25% des personnes sont atteintes de la maladie»

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|p - f|}{\sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}}} = 2,4$$

3- Conclusion :
Pour le risque α=5%,

ε > 1,96 alors on rejette H_0 : la différence est significative, c'est-à-dire on rejette l'hypothèse que 25% des personnes de la population sont atteintes de la maladie.

Exercice :
Dans un hôpital, on prétendait qu'il y avait deux fois plus de malades hommes que de malades femmes. Dans un échantillon de 90 malades, on a observé qu'il se trouvait 50 hommes et 40 femmes. Y a-t - il deux fois plus d'hommes que des femmes dans la population des patients de cet hôpital ?
Solution :

La proportion observée de malades hommes est $f=\frac{50}{90}=0,56$.

Il s'agit de comparer la proportion observée f à la proportion théorique $p=\frac{2}{3}$.

On utilise le test de l'écart-réduit sachant que la condition d'utilisation est vérifiée : n.p=60>5.

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 «L'échantillon est extrait au hasard de la population de patients dont $\frac{2}{3}$ sont des hommes »

ou bien, on pose :
H_0 « Il y a deux fois plus de malades hommes que de malades femmes »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|p - f|}{\sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}}} = 2,23$$

3- Conclusion :
Pour le risque α=5%,

ε > 1,96 alors on rejette H_0 : la différence est significative. On conclut qu'il n'y a pas deux fois plus de malades hommes que de malades femmes au risque de 5%.

Remarque : On pourra également comparer la proportion observée de malades femmes $f=\frac{40}{90}$ à la proportion théorique $p=\frac{1}{3}$.

2. Comparaison de deux proportions pour des observations indépendantes :

Exemple :
On veut comparer l'efficacité de deux traitements T_1 et T_2 dont le résultat est un caractère qualitatif à deux classes : guérison et pas de guérison. On constitue, par tirage au sort, deux groupes de malades d'effectifs n_1 et n_2 dont l'un reçoit le traitement T_1 et l'autre le traitement T_2 . A l'issue de l'expérience, on obtient le nombre k_1 de malades guéris par le traitement T_1 et celui k_2 par le traitement T_2 , d'où les proportions de guérison dans les deux groupes sont respectivement $f_1=\frac{k_1}{n_1}$ et $f_2=\frac{k_2}{n_2}$.

Le problème consiste à comparer les proportions observées f_1 et f_2 pour savoir si les deux traitements sont d'efficacité différente.

Généralisation du problème :

Etant donné deux échantillons de tailles n_1 et n_2 dans lesquels les nombre d'individus possédant un certain caractère qualitatif sont respectivement k_1 et k_2 , d'où les proportions observées sont respectivement $f_1=\frac{k_1}{n_1}$ et $f_2=\frac{k_2}{n_2}$. On suppose que les échantillons sont extraits de deux populations dont les proportions des individus possédant le caractère sont respectivement p_1 et p_2 .
Le problème consiste à comparer les proportions de ces deux échantillons.
En général, les proportions f_1 et f_2 sont différentes ; il nous faut expliquer cette différence : est-elle due aux fluctuations d'échantillonnage (c'est à dire que la différence provient du choix au hasard des deux échantillons) ou bien est-elle jugée trop grande ?
Cette question peut être posée de la façon suivante :
Les deux échantillons proviennent-ils de deux populations de même proportion (c'est à dire $p_1= p_2$) ou bien de deux populations différentes (c'est à dire $p_1 \neq p_2$)?
On procède au test de comparaison de deux proportions pour des observations indépendantes :

Test d'homogénéité : Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « Les deux échantillons proviennent de deux populations de même proportion ($p_1 =p_2$)»
Dans l'exemple précédent, H_0 « Les deux traitements T_1 et T_2 ont la même efficacité »

2- On calcule la statistique ε :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{|f_1 - f_2|}{\sqrt{p.(1-p).\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}}$$

$$\text{où } p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

- Si $\varepsilon < 1{,}96$ alors on ne rejette pas H_0 et on conclut qu'il n'y a pas de différence significative entre les proportions des deux échantillons.
- Si $\varepsilon \geq 1{,}96$ alors on rejette H_0 : et on conclut qu'il y a une différence significative entre les proportions des deux échantillons.

Remarque : Pour le risque α=1%, on compare la valeur de ε à 2,6.

Conditions d'utilisation du test : Le test n'est utilisable que si $n_1.p \geq 5$ et $n_2.p \geq 5$.

Exemple 1 :

Deux tests médicaux T_1 et T_2 sont destinés à déceler la présence d'une maladie et on se propose d'en comparer l'efficacité.

Sur un premier échantillon E_1 de 500 personnes atteintes de la maladie, le test T_1la révèle dans 400 cas.

Sur un deuxième échantillon E_2 de 380 personnes atteintes de la maladie, le test T_2la révèle dans 323 cas. Au risque de 5%, faut-il écarter l'hypothèse que T_1 et T_2 ont la même efficacité ?

Solution :

E_1 : $n_1 = 500$ $\quad f_1 = \frac{k_1}{n_1} = \frac{400}{500} = 0{,}8$

E_2 : $n_2 = 380$ $\quad f_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{323}{380} = 0{,}85$

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 « Les deux tests ont la même efficacité »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|f_1 - f_2|}{\sqrt{p.(1-p).\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 1{,}92$$

$$\text{où } p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{400 + 323}{500 + 380} = \frac{723}{880} = 0{,}82$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

ε<1,96 alors on ne rejette pas H_0 : il n'y a pas de différence significative entre les proportions des deux échantillons. D'où on ne peut pas écarter l'hypothèse que les traitements T_1 et T_2 ont la même efficacité dans la détection de la maladie.

Conditions d'utilisation du test :

Le test est utilisable car $n_1.p=410>5$ et $n_2.p=311{,}6>5$.

Exemple 2 :

Dans une enquête sur le cancer de la vessie, on a tiré au sort 2500 sujets d'une population donnée : 1000 consomment de la saccharine et 1500 n'en consomment pas. On les a surveillé pendant dix ans et on a observé 40 cas de cancer de la vessie chez les consommateurs de saccharine et 30 chez les non-consommateurs.

Y a-t-il une liaison entre la consommation de saccharine et le fait d'avoir le cancer de la vessie ?

Solution :

Il s'agit de comparer les proportions de sujets atteints de cancer des deux groupes : consommateurs de saccharine et non-consommateurs.

Groupe consommateurs de saccharine : $n_1 = 1000$ $k_1 = 40$ $f_1 = \frac{k_1}{n_1} = \frac{40}{1000} = 0{,}04$

Groupe non consommateurs de saccharine : $n_2 = 1500$ $k_2 = 30$ $f_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{30}{1500} = 0{,}02$

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 « La différence entre les deux proportions f_1 et f_2 n'est pas significative »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|\ f_1 - f_2\ |}{\sqrt{p.(1-p).\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 2{,}96$$

$$\text{où } p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{40 + 30}{1000 + 1500} = \frac{70}{2500} = 0{,}028$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

ε>1,96 alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une différence significative entre les proportions des deux groupes : il y a une liaison entre la consommation de saccharine et le fait d'avoir le cancer (la consommation de saccharine influe sur le nombre de cas de cancer). On peut conclure que les sujets qui consomment de la saccharine ont un risque de cancer plus élevé que ceux qui n'en consomment pas (f_1=0,04>f_2=0,02).

Conditions d'utilisation du test :

Le test est utilisable car $n_1 .p=28>5$ et $n_2 .p=42>5$.

Remarque :

Le risque relatif (RR) d'échec d'un groupe par rapport à l'autre est le rapport des proportions d'échecs observées des deux groupes.

En d'autres termes,

$$\boxed{RR = \frac{f_1}{f_2}}$$

Dans notre exemple, $RR = \frac{f_1}{f_2} = \frac{0{,}04}{0{,}02} = 2$. Ceci signifie que les consommateurs de la saccharine ont un risque de cancer 2 fois plus élevé que ceux qui n'en consomment pas.

3. Comparaison de deux proportions pour des observations appariées :

Dans l'exemple précédent concernant la comparaison de l'efficacité de deux traitements T_1 et T_2, on a constitué deux groupes de malades qu'on traite l'un par T_1 , l'autre par T_2 et on compare les proportions de guérison dans les deux groupes en utilisant le test précédent.
Dans certains cas particuliers, on pourra donner les deux traitements au même malade ; on le fera soit successivement (l'effet du premier doit être terminé quand on administre le deuxième) soit simultanément, par exemple, on compare deux tests cutanés destinés à dépister une allergie ; on les appliquera chacun sur un bras du sujet.
Il faut tenir compte que les résultats sont obtenus sur les mêmes sujets. Dans ce cas, on dit que les observations sont appariées puisque chaque malade est son propre témoin.
Exemple :
Une expérience destinée à comparer l'efficacité de deux traitements T_1 et T_2 a porté sur un échantillon de 100 malades, tous recevant successivement les deux traitements. Le résultat de chaque traitement est noté par + (guérison) ou - (pas de guérison) de sorte qu'on a finalement 100 couples de réponses. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Résultat du traitement		Nombre de Malades
T_1	T_2	
-	-	35
-	+	5
+	-	15
+	+	45
TOTAL		100

On montre qu'il faut laisser de côté les paires de réponses concordantes c'est à dire 35 réponses (-,-) et 45 réponses (+,+), qui n'apportent rien à la question de savoir quel est le meilleur traitement. On considère alors les paires de réponses antagonistes :

5 réponses (-,+) et 15 réponses (+,-)

Il y a donc 20 réponses antagonistes.

La proportion de guérison pour le traitement T_1 est $f_1=\frac{15}{20}$ et celle pour le traitement T_2 est $f_2=\frac{5}{20}$.

Le problème consiste à comparer les proportions de guérison f_1 et f_2 .

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « La différence entre les deux proportions f_1 et f_2 n'est pas significative »
Dans notre exemple, H_0 « Les deux traitements ont la même efficacité »

2- On désigne par a le nombre de réponses (-,+) et par b celui de réponses (+,-).
On calcule la statistique ε :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{|a - b|}{\sqrt{a + b}}}$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

- Si $\varepsilon < 1{,}96$ alors on ne rejette pas H_0 et on conclut qu'il n'y a pas de différence significative entre les proportions.
- Si $\varepsilon \geq 1{,}96$ alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une différence significative entre les deux proportions.

Remarque : Pour le risque α=1%, on compare la valeur de ε à 2,6.

Condition d'utilisation du test : Le test n'est utilisable que si $(a + b) \geq 10$.

Solution de l'exemple précédent :

On a 5 réponses (-,+) et 15 réponses (+,-) .

La proportion de guérison pour le traitement T_1 est $f_1=\frac{15}{20}$ et celle pour le traitement T_2 est $f_2=\frac{5}{20}$.

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « Les deux traitements ont la même efficacité »

2- On désigne par a le nombre de réponses (-,+) et par b celui de réponses (+,-) : a=5 et b=15.

On calcule la statistique ε : $\varepsilon = \frac{|a - b|}{\sqrt{a + b}} = \frac{|5 - 15|}{\sqrt{5 + 15}} = 2{,}23$

3- Conclusion : Au risque α=5%,

$\varepsilon > 1{,}96$ alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une différence significative entre les deux proportions. On peut conclure que le traitement T_1 est plus efficace que le traitement T_2 .

Remarque : le test précédent est utilisable car (a+b)=20 >10.

Remarque importante :

La notion de différence entre deux séries appariées recouvre deux questions distinctes qui sont, dans notre exemple :

1. Y a-t-il une différence entre les deux traitements ? c'est ce problème qui vient d'être résolu en comparant les proportions de guérison sans faire intervenir les paires de réponses concordantes.
2. Y a-t-il une relation, pour un malade, entre les résultats par le traitement T_1 et les résultats par le traitement T_2 ? c'est-à-dire un malade donnant un résultat + par T_1 a-t-il de fortes chances de donner un résultat + par T_2 ? Il s'agit donc d'un problème de degré de concordance des réponses aux deux traitements.
   Pour cela, on compare la proportion de réponses + avec le traitement T_2 parmi les malades ayant donné une réponse + avec le traitement T_1 ($f_1=f(T_2^+ / T_1^+)=\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$) à la proportion de réponses + avec le traitement T_2 parmi les malades ayant donné une réponse - avec le traitement T_1 ($f_2=f(T_2^+ / T_1^-) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$) .

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « Il y a indépendance entre les deux traitements »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|f_1 - f_2|}{\sqrt{p.(1 - p).\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 6{,}12$$

$$\text{où } p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{45 + 5}{60 + 40} = \frac{50}{100} = 0{,}50$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

ε>1,96 alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une relation entre les réponses des deux traitements. Un malade donnant un résultat + avec le traitement T_1 a plus de chances de donner un résultat + avec le traitement T_2 .

Conditions d'utilisations du test : n_1 .p=60.0,50=30>5 et n_2 .p=40.0,50=20>5.

Exemple :

Dans une grande expérience destinée à comparer deux tests cutanés pour le dépistage d'une allergie, on a obtenu les résultats suivants, où + désigne un test positif et - un test négatif :

Résultat du test		Nombre de Sujets
A	B	
-	-	370
-	+	140
+	-	180
+	+	310
TOTAL		1000

1. Y a-t-il une différence entre les deux tests cutanés ?

2. Y a-t-il une relation entre les résultats des deux tests ?

Solution :

1. On a 140 réponses (-,+) et 180 réponses (+,-) .

La proportion de sujets présentant une allergie pour le test A est $f_1=\frac{180}{320} = \frac{9}{16}$ et celle pour le test B est $f_2=\frac{140}{320} = \frac{7}{16}$.

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 « Les deux tests ont la même efficacité »

2- On désigne par a le nombre de réponses (-,+) et par b celui de réponses (+,-) : a=140 et b=180.

On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|a - b|}{\sqrt{a + b}} = \frac{|180 - 140|}{\sqrt{180 + 140}} = 2{,}23$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

ε > 1,96 alors on rejette H_0 : et on conclut qu'il y a une différence significative entre les deux proportions. Le test A est plus efficace que le test B c'est à dire que le test A donne plus de résultats + que le test B.

Remarque : le test précédent est utilisable car (a+b)= 320 > 10.

2. Il s'agit de comparer les proportions $f_1= f(B^+/A^+)=\frac{310}{490} = \frac{31}{49}$ et $f_2= f(B^+/A^-) =\frac{140}{510} = \frac{14}{51}$.

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :
H_0 « Il y a indépendance entre les deux traitements »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|\ f_1 - f_2\ |}{\sqrt{p.(1-p).\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = 11{,}43$$

$$\text{où } p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{310 + 140}{1000} = \frac{450}{1000} = 0{,}45$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

ε>1,96 alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une relation entre les réponses des deux tests. Un malade donnant un résultat + avec le test A a plus de chances de donner un résultat + avec le test B.

Conditions d'utilisations du test : n_1 .p=490.0,45=220,5>5 et n_2 .p=510.0,45=229,5>5.

Exercice :

Dans une expérience, on veut évaluer la concordance entre deux médecins bien déterminés jugeant d'après un certain nombre de critères la présence ou l'absence d'une maladie. Cette expérience a porté sur un échantillon de 400 sujets atteints probablement de cette maladie dont chacun a subi successivement, dans un ordre tiré au sort, les deux diagnostics. Les résultats sont consignés au tableau suivant où + désigne la présence de la maladie et - l'absence de la maladie.

Diagnostic du médecin		Nombre de malades
M_1	M_2	
-	-	50
-	+	20
+	-	30
+	+	300
TOTAL		400

1. Y a-t-il une différence entre les résultats des deux diagnostics ?
2. Y a-t-il une bonne concordance entre les deux médecins ?

Solution :

1. On tient compte du fait que les résultats sont obtenus sur les mêmes malades. Il s'agit donc de séries appariées. On ne tient compte que des résultats discordants : on compare deux proportions de résultats + pour des observations appariées.

Proportion de résultats + avec le diagnostic 1 : $f_1 = \frac{30}{50} = 0{,}6$.

Proportion de résultats + avec le diagnostic 2 : $f_2 = \frac{20}{50} = 0{,}4$.

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 « Les deux diagnostics sont les mêmes dans la détection de la maladie »

2- On désigne par a le nombre de réponses (-,+) et par b celui de réponses (+,-) : a=20 et b=30.

On calcule la statistique ε : $\varepsilon = \frac{|a - b|}{\sqrt{a + b}} = \frac{|20 - 30|}{\sqrt{20 + 30}} = 1{,}41$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

ε < 1,96 alors on ne rejette pas H_0 : et on conclut qu'il n'y a pas une différence significative . Les deux diagnostics sont les mêmes dans la détection de la maladie.

Remarque : le test précédent est utilisable car (a+b)= 50 > 10.

2. Il s'agit de comparer les proportions de résultats + avec le 2ème diagnostic selon les résultats avec le 1er .

$f_1=f(D_2^+ / D_1^+)=\frac{300}{330} = 0{,}9$ et $f_2=f(D_2^+ / D_1^-)=\frac{20}{70} = 0{,}28$.

Test de l'écart-réduit

1- On pose l'hypothèse nulle :

H_0 « Il y a indépendance entre les résultats des deux diagnostics »

2- On calcule la statistique ε :

$$\varepsilon = \frac{|\ f_1 - f_2\ |}{\sqrt{p.(1 - p).\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = 11{,}94$$

$$\text{où } p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{300 + 20}{400} = \frac{320}{400} = 0{,}8$$

3- Conclusion : Pour le risque α=5%,

ε>1,96 alors on rejette H_0 et on conclut qu'il y a une relation entre les résultats des deux diagnostics : cette relation est positive. Un malade donnant un résultat + avec le 1er diagnostic a plus de chances de donner un résultat + avec le 2ème.

Conditions d'utilisations du test : n_1 .p=330.0,80=264>5 et n_2 .p=70.0,80=56>5.

Application médicale : Problème d'interaction

Au cours d'un essai comparant deux traitements, un sujet est considéré comme son propre témoin s'il reçoit les deux traitements simultanément ou successivement. Avant même d'envisager ce type d'essai, il faut s'assurer qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux traitements.

1. Interaction entre deux traitements

On dispose de deux traitements A et B dont l'efficacité n'a jamais été démontrée. On pourra dans un même essai comparer A à B en rajoutant un troisième groupe recevant un placebo. Cet essai permettra donc de déterminer d'une part l'efficacité de A, d'autre part celle de B et de comparer A à B puis on choisit éventuellement le plus efficace.

On pourra également envisager de planifier l'essai selon un plan 2x2 qui fait l'objet de cette partie : c'est un essai qui nécessite de répartir N sujets par tirage au sort en 4 groupes de même effectif dont chacun reçoit :

- Placebo de A + Placebo de B
- Traitement A + Placebo de B
- Traitement B + Placebo de A
- Traitement A + Traitement B

Ce plan permettra de tester l'efficacité de A, l'efficacité de B et d'évaluer l'intérêt de l'association A+B. On résume l'ensemble des observations dans le tableau suivant (on suppose que le résultat du traitement est un succès ou un échec) :

Tableau de proportions de succès

	Placebo de A	Traitement A
Placebo de B	n_1/n	n_2/n
Traitement B	n_3/n	n_4/n

L'analyse des données observées comporte deux étapes :

1. Rechercher l'interaction entre A et B :

On dit qu'il n'y a pas d'interaction entre A et B si l'effet de A est le même, que B soit présent ou absent et réciproquement.

2. Tester l'efficacité de A puis celle de B (en fonction de la première étape).

1. Recherche d'une interaction :

Tableau d'effets (E) dans chaque groupe

	Placebo de A	Traitement A
Placebo de B	$E_{\overline{A}\overline{B}}$	$E_{A\overline{B}}$
Traitement B	$E_{\overline{A}B}$	E_{AB}

Lorsque B est présent, l'effet de A est : $E_{AB} - E_{\overline{A}B}$

Lorsque B est absent, l'effet de A est : $E_{A\overline{B}} - E_{\overline{A}\overline{B}}$

Lorsque A est présent, l'effet de B est : $E_{AB} - E_{A\overline{B}}$

Lorsque A est absent, l'effet de B est : $E_{\overline{A}B} - E_{\overline{A}\overline{B}}$

Concrètement, l'absence d'interaction signifie que :

$$\begin{cases} \left(E_{AB} - E_{\overline{A}B}\right) - \left(E_{A\overline{B}} - E_{\overline{A}\overline{B}}\right) \approx 0 \\ \left(E_{AB} - E_{A\overline{B}}\right) - \left(E_{\overline{A}B} - E_{\overline{A}\overline{B}}\right) \approx 0 \end{cases}$$

La première équivalence peut s'écrire :

$$\boxed{\left(E_{AB} + E_{\overline{A}\overline{B}}\right) - \left(E_{\overline{A}B} + E_{A\overline{B}}\right) \approx 0}$$

La deuxième équivalence peut s'écrire :

$$\boxed{\left(E_{AB} + E_{\overline{A}\overline{B}}\right) - \left(E_{\overline{A}B} + E_{A\overline{B}}\right) \approx 0}$$

Donc l'absence d'interaction signifie : $\frac{n_1+n_4}{2n}-\frac{n_2+n_3}{2n}\approx 0$

Tester l'interaction entre A et B revient donc a comparer deux proportions de succès des deux groupes :

Groupe recevant $(A+B)$ **r** $(Pl(A)+Pl(B))$: $f_1=\frac{n_1+n_4}{2n}$

Groupe recevant $(A+Pl(B))$ **r** $(Pl(A)+B)$: $f_2=\frac{n_2+n_3}{2n}$

2. <u>Test d'efficacité des deux traitements</u> :

a- <u>Absence d'interaction</u> : On évalue l'effet global de chacun des deux traitements. Pour tester l'effet global de A (de B), il suffit donc de comparer, sans tenir compte de B (de A), l'ensemble des résultats obtenus avec A (avec B) à l'ensemble de ceux obtenus sans A (sans B).

<u>L'effet global de A</u>

Groupe recevant le traitement A sans tenir compte de B : $f_1=\frac{n_2+n_4}{2n}$

Groupe recevant le placebo de A sans tenir compte de B : $f_2=\frac{n_1+n_3}{2n}$

<u>L'effet global de B</u>

Groupe recevant le traitement B sans tenir compte de A : $f_1=\frac{n_3+n_4}{2n}$

Groupe recevant le placebo de B sans tenir compte de A : $f_2=\frac{n_1+n_2}{2n}$

<u>Remarque</u> : En cas d'absence d'interaction, l'association A+B ne présente pas d'intérêt.

b- <u>Présence d'interaction :</u> L'effet d'un traitement est différent selon que l'autre est présent ou absent ; il est alors impossible d'évaluer l'effet global de chacun des deux traitements. On pourra juger si l'association A+B a de l'intérêt en observant si la proportion de succès avec A+B est plus grande que celle avec A seul et B seul.

Groupe recevant A+B : $f=\frac{n_4}{n}$ → Groupe recevant A seul : $f_1=\frac{n_2}{n}$

Groupe recevant A+B : $f=\frac{n_4}{n}$ → Groupe recevant B seul : $f_2=\frac{n_3}{n}$

Ensuite, on étudie l'effet de chacun des deux traitements par rapport au placebo.

<u>Effet de A :</u>

Groupe recevant A seul : $f_1=\frac{n_2}{n}$

Groupe recevant le placebo : $f_2=\frac{n_1}{n}$

<u>Effet de B :</u>

Groupe recevant B seul : $f_1=\frac{n_3}{n}$

Groupe recevant le placebo : $f_2=\frac{n_1}{n}$

En fonction des résultats obtenus, on choisit éventuellement le traitement le plus efficace.

Remarques :

- Cette méthode d'analyse est encore valable lorsque les effectifs sont sensiblement égaux.
- Cette méthode d'analyse s'applique également lorsque le résultat du traitement est un caractère quantitatif (dosage d'une certaine substance). Il s'agit dans ce cas de comparaison de moyennes.

Exemples :

1.

	Placebo de A et traitement de B	Traitement A et placebo de B	Placebo A et placebo de B	Traitement A et traitement B
Nombre de cas	50	50	50	50
Nombre de succès	10	40	30	20

2.

	Placebo de A et traitement de B	Traitement A et placebo de B	Placebo A et placebo de B	Traitement A et traitement B
Nombre de cas	139	156	144	146
Nombre de succès	109	118	116	126